Revue des sciences de l’éducation

« Voix et perspective » : à l’écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes

Jere Confrey

Volume 20, numéro 1, 1994

Constructivisme et éducation

URI : https://id.erudit.org/iderudit/031703ar
DOI : https://doi.org/10.7202/031703ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Confrey, J. (1994). « Voix et perspective » : à l’écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes. *Revue des sciences de l’éducation*, *20*(1), 115–133. https://doi.org/10.7202/031703ar

Résumé de l'article

Le constructivisme radical diffère de plusieurs interprétations constructivistes nord-américaines par le fait qu'il s'intéresse aux effets épistémologiques des innovations des étudiants et des étudiantes. En reconnaissant que le point de vue de ceux-ci n'est pas un simple point de vue d'adulte erroné ou incomplet, il permet ainsi de reconceptualiser le contenu mathématique de l'expert (enseignant ou chercheur) en l'envisageant à la lumière des inventions des étudiants et des étudiantes. Dans cet article, deux cas seront ainsi examinés. Le premier est tiré d'une expérience d'enseignement du plus petit multiple commun dans une classe de quatrième année. Le second relate une expérience d'ensei- gnement des fonctions exponentielles auprès d'un étudiant de première année universitaire. Pour distinguer le contenu épistémologique du savoir de l'étudiant et ses effets sur le savoir de l'expert, nous désignons le premier par le vocable « voix » et le second par celui de « perspective ».

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XX, n° 1, 1994, p. 115 à 133

«Voix et perspective»: à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes

Jere Confrey
Professeure
Université Cornell

Résumé – Le constructivisme radical diffère de plusieurs interprétations constructivistes nord-américaines par le fait qu'il s'intéresse aux effets épistémologiques des innovations des étudiants et des étudiantes. En reconnaissant que le point de vue de ceux-ci n'est pas un simple point de vue d'adulte erroné ou incomplet, il permet ainsi de reconceptualiser le contenu mathématique de l'expert (enseignant ou chercheur) en l'envisageant à la lumière des inventions des étudiants et des étudiantes. Dans cet article, deux cas seront ainsi examinés. Le premier est tiré d'une expérience d'enseignement du plus petit multiple commun dans une classe de quatrième année. Le second relate une expérience d'enseignement des fonctions exponentielles auprès d'un étudiant de première année universitaire. Pour distinguer le contenu épistémologique du savoir de l'étudiant et ses effets sur le savoir de l'expert, nous désignons le premier par le vocable «voix» et le second par celui de «perspective».

L'histoire se déroule dans une classe de quatrième année. Le professeur cherche à initier les élèves au plus petit commun multiple (PPCM) par le biais de l'utilisation de la rythmicité des gestes. Deux élèves se portent volontaires. Le professeur tape des mains à un rythme régulier et demande à l'un d'eux de taper des mains tous les deux temps et à l'autre tous les cinq temps. Après quelques ajustements, chacun réussit à maintenir sa cadence. Le professeur demande alors aux autres élèves de repérer le moment où leurs compagnons vont taper des mains en même temps. Les élèves écoutent attentivement puis répondent avec assurance: «Dix, à tous les dix coups». Le professeur continue mais, cette fois, un élève tape des mains tous les deux temps et un autre tous les quatre temps. La classe affirme que les élèves tapent des mains au même moment tous les quatre temps. On essaie le même jeu avec une nouvelle cadence combinant des battements à deux et à trois temps. Les enfants ayant de la difficulté à maintenir leur cadence, ils décident de se regrouper en équipes de cinq élèves. Dans chaque groupe, un élève maintient le rythme régulier, deux d'entre eux exécutent la nouvelle cadence avec ses deux battements distincts et les deux autres tentent de repérer le moment des battements simultanés. Déjà, plusieurs enfants ont une idée pour prédire le moment de la simultanéité des battements: «il n'y a qu'à multiplier les deux nombres». Sans tenir compte momentanément de leur hypothèse, le professeur assigne deux tâches aux équipes. La première tâche consiste à prédire le moment où coïncideront un battement à quatre temps et un autre à six temps, et à vérifier la prédiction; la seconde, à construire, à l'aide du matériel disponible dans la classe, une représentation concrète de leurs méthodes qui rendrait compte des exercices précédents, y compris celui des battements à quatre et à six temps.

La majorité des enfants trouvent le travail de représentation facile et intéressant. Quelques-uns commencent par faire des piles de différentes hauteurs en utilisant à cet effet des cubes unifixes (petits cubes emboîtables), mais quand ils voient que les autres (la majorité de la classe) forment des rangées avec ces cubes et marquent chaque deuxième cube d'une couleur et chaque troisième cube d'une autre couleur, ils adoptent presque tous cette méthode (voir figure 1). En tapant des mains et en utilisant les cubes unifixes, ils prédisent que les battements à quatre et à six temps coïncideront une première fois au 24[e] temps et sont surpris d'observer que c'est plutôt au 12[e] temps qu'ils coïncident. Le professeur profite de cette situation pour lancer un défi au groupe. Y a-t-il moyen de repérer les premiers battements simultanés en ne regardant que les nombres? Tous les enfants s'y intéressent activement et gaiement, sauf Terry. Assise avec son groupe, Terry est en larmes. Personne ne veut l'écouter. Personne ne comprend son problème. Personne ne saisit sa réponse. Et elle refuse de changer sa méthode, tant qu'on ne lui accordera pas la chance d'être entendue.

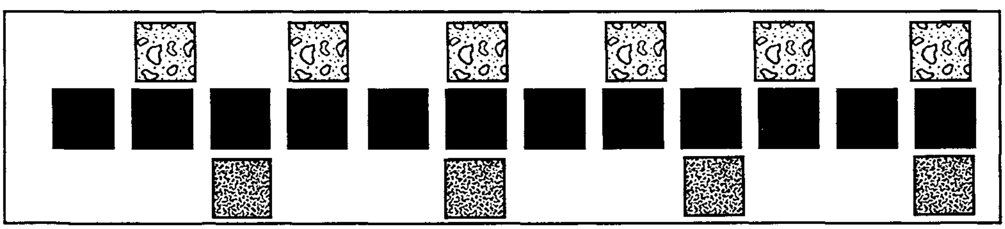

Figure 1 – Modèle le plus courant

Finalement, le professeur la rejoint. En pleurnichant, Terry explique sa méthode. Elle utilise des formes géométriques. Elle commence par déposer cinq hexagones jaunes sur la table. Puis, cinq autres, séparés par un espace, et encore cinq autres. Ensuite, elle met un losange rouge sur le deuxième hexagone de chaque groupe et un triangle vert sur le troisième hexagone de chaque groupe (voir figure 2). «Mais, dit-elle, ils ne se rencontrent jamais!» À première vue, il peut sembler que Terry n'a pas compris le problème. Toutefois, lorsqu'elle réalise que quelqu'un l'écoute, elle poursuit son explication. Elle fait remarquer que si l'un des enfants qui tapent des mains perd le rythme, et que celui qui maintient le rythme régulier ne s'arrête pas, celui qui perd le rythme ne saura pas quand il doit recommencer. Dans sa méthode, la personne qui compte les battements réguliers, «le compteur», doit toujours compter jusqu'au même nombre et recommencer à zéro. Elle illustre son raisonnement en comptant jusqu'à cinq: un, deux, trois, quatre, cinq; un, deux, trois... Quand le compteur dit «deux», le deuxième enfant tape des mains, c'est-à-dire à chaque battement désigné «deux». Chaque fois que le compteur dit «trois», un autre enfant tape des mains, donc il tape des mains tous les trois temps. Mais, avec cette méthode, les enfants ne tapent jamais des mains en même temps.

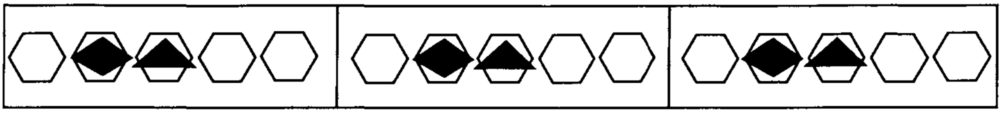

Figure 2 – Modèle de Terry

Dès qu'elle est ainsi écoutée, Terry arrête de pleurer. Elle admet que sa méthode est différente de celles des autres enfants, mais elle tient simplement à ce que quelqu'un comprenne le raisonnement sur lequel repose sa méthode. Elle veut aussi proposer une méthode qui facilitera le comptage des battements pour la reprise du rythme.

Cette histoire illustre un certain nombre de points. Le premier est que, dans les classes de mathématiques du monde entier, même si les enfants sont réellement engagés dans leurs activités, leurs inventions sont rarement «entendues» et cela est dévastateur pour eux. Ils en viennent à se sentir dévalorisés et frustrés, de sorte que, le plus souvent, ils cessent d'élaborer des hypothèses et s'en remettent au professeur pour qu'il leur indique ce qu'ils sont supposés faire. Ils apprennent ainsi à étouffer leur créativité.

La plupart des interprétations constructivistes admettent jusqu'à un certain point que cette répression des capacités créatrices des étudiants pose un problème. En effet, la majorité de ces interprétations reconnaissent que valoriser ce que les élèves savent et encourager leur engagement actif dans le processus d'apprentissage sont des aspects essentiels. Mais alors, en quoi le constructivisme radical diffère-t-il de ces interprétations?

La différence fondamentale réside dans la façon de composer avec des situations similaires à celle évoquée dans l'histoire de Terry. Le constructiviste radical se doit d'examiner les implications épistémologiques des inventions de l'étudiant ou de l'étudiante alors que, pour les constructivistes non radicaux, il n'existe aucune obligation de ce genre. Généralement, les constructivistes non radicaux, tout en prenant acte de la rationalité qui sous-tend l'approche de Terry, la considèrent comme une approche intéressante, différente (*alternative*) ou partiellement correcte, mais ils l'envisagent néanmoins dans la seule perspective du contenu d'enseignement projeté, soit, dans le présent cas, celui qui consiste à trouver une méthode numérique pour obtenir le PPCM. À l'opposé, le constructiviste radical s'intéressera à la qualité épistémologique d'une méthode comme celle de Terry, et cela, parce que, selon le constructivisme radical, la viabilité d'une connaissance est une condition incontournable.

Le constructivisme radical n'est pas seulement une théorie de l'apprentissage, c'est une théorie de la connaissance. Et soutenir, comme le constructivisme le soutient, qu'une connaissance est viable, implique que celle-ci n'est pas une accumulation de vérités arrêtées, mais bien qu'elle a une fonction adaptative, c'est-à-dire qu'elle sert à organiser l'expérience. En effet, une connaissance est construite par le sujet connaissant à travers son engagement dans des activités finalisées. En ce sens, elle recouvre les itinéraires par lesquels celui-ci a donné un sens à des actions qui, de son point de vue, se sont révélées viables et qui guident ses actions futures. Glasersfeld (1982) explique pourquoi le savoir doit être viable:

> J'ai déjà parlé de la connotation ambiguë du concept d'adaptation et j'ai suggéré de lui substituer un concept plus adéquat, soit celui de viabilité. Du point de vue de l'organisme, tant au niveau biologique qu'au niveau cognitif, l'environnement n'est rien d'autre que la somme des contraintes à l'intérieur desquelles l'organisme peut agir. Les opérations et les activités de l'organisme sont «réussies» lorsqu'elles ne sont pas contrecarrées par des contraintes, c'est-à-dire lorsqu'elles sont viables. Donc, c'est seulement lorsque ces actions ou opérations échouent que l'on peut parler de «contact» avec l'environnement, non pas lorsqu'elles réussissent (Glasersfeld, 1982, p. 614).

Comment cette conception de la viabilité nous permet-elle de comprendre l'histoire de Terry? Premièrement, la reconnaissance de la viabilité d'une connaissance, et l'impossibilité d'une réalité unique qu'elle implique alors, suppose que l'on s'attarde à l'expression d'une diversité de points de vue dans la classe. Les constructivistes radicaux insistent sur le fait que la culture de la classe doit être transformée pour justement encourager cette diversité et allouer aux étudiants le temps, l'espace et le respect mutuel essentiels à l'articulation et à la clarification de points de vue multiples. Toutefois, si cette perspective a été mise de l'avant par des constructivistes radicaux (Balacheff, 1991; Bauersfeld, 1988; Cobb, Wood et Yackel, 1991; Voigt, 1985), elle a été depuis adoptée par la plupart des constructivistes. En ce sens, elle ne distingue donc plus le constructivisme radical des autres formes de constructivisme.

Deuxièmement, tout en encourageant l'expression de la diversité, le constructivisme radical suppose que l'on examine plus en profondeur et en termes épistémologiques la méthode de Terry. Pour ce faire, on doit faire usage d'une méthodologie appropriée pour analyser la pensée des étudiants et des étudiantes. Le chercheur constructiviste ne cherche donc pas à décrire les structures qui se trouvent dans la tête d'un enfant, mais plutôt à en construire un modèle (Cobb et Steffe, 1983; Confrey, 1980). À cet effet, une des méthodes est celle que nous avons appelée «écoute attentive et soutenue» (Confrey, 1993) et qui s'inspire de l'entrevue clinique mise au point par Piaget. Les principes de cette méthode sont les suivants:

1. formuler les situations en s'inspirant du langage des étudiants et des étudiantes;
2. suivre attentivement le développement du problème, en tentant de se décentrer de sa propre perspective;
3. encourager explicitement les manifestations d'autonomie des étudiants et des étudiantes;
4. demander des clarifications et reformuler les propositions dans le langage de l'étudiant et de l'étudiante;
5. éviter d'exprimer des jugements de valeur, excepté ceux qui encouragent l'articulation de la méthode utilisée;
6. se dégager du rôle de «pourvoyeur de réponses»;
7. faire en sorte que l'étudiant ou l'étudiante demeure confiant tout au long de l'entrevue et s'engage réellement dans le processus de résolution du problème;
8. permettre à l'étudiant ou à l'étudiante de repérer les erreurs et les contradictions;
9. fournir les ressources à l'étudiant ou à l'étudiante pour lui permettre de s'engager dans une variété de cheminements possibles face au problème;
10. conduire les entrevues sur une période de temps suffisamment longue pour que l'étudiant ou l'étudiante ait l'occasion de s'exprimer.

Si l'on applique cette technique d'écoute attentive et soutenue au cas de Terry, on se trouve confronté à une question fondamentale. La méthode de Terry est-elle viable? Terry a-t-elle accompli la tâche dans laquelle elle s'était engagée? En quoi sa méthode est-elle liée au problème initial posé par le professeur?

Pour répondre à cette question, il faut commencer par examiner la problématique dans laquelle était engagée Terry. Le terme «problématique» est ici utilisé pour montrer que la situation envisagée par l'élève n'est nullement équivalente au problème posé, tel qu'il était formulé initialement, mais renvoie à l'interprétation du problème par le sujet, en regard de ses buts, de ses attentes et de ses connaissances antérieures. Cette problématique apparaît lorsqu'une perturbation est déclenchée, suscitant alors une certaine action de la part du sujet. Cette perturbation constitue en quelque sorte un obstacle au but qu'un individu s'est fixé, une nécessité d'agir ou de pallier un déséquilibre. Pour un enseignant ou un interviewer, cerner la problématique d'un élève est un long processus, qui ne se construit jamais de manière immédiate ou définitive. Il s'agit d'une élaboration progressive qui s'appuie sur un ensemble de conjectures, passe par plusieurs essais de clarification et requiert des modifications et des ajustements successifs de points de vue. De plus, cette élaboration prend appui sur des actions et sur des réflexions produites autant par l'enseignant (ou l'interviewer) que par l'élève. Bien que Piaget ait montré l'importance de cet état de déséquilibre au cours de ses entrevues cliniques, il n'a pas accordé d'attention particulière à cette nécessité de cerner la problématique de l'étudiant ou de l'étudiante pas plus qu'au fait de l'aider à préciser cette problématique, à des fins d'apprentissage.

Quelle était la problématique de Terry? Elle voulait découvrir une méthode qui faciliterait, lors du comptage des battements, la reprise éventuelle du rythme par un enfant. On voit très bien en quoi la solution qu'elle propose répond à cette problématique. L'expérience de Terry dans la pratique d'un instrument de musique, en l'occurrence le violon, et sa connaissance de la lecture musicale ont pu influencer l'élaboration de cette problématique. Terry était en effet familière avec les notations telles qu'elles sont utilisées en musique. Ainsi, deux interprétations de la solution de Terry sont maintenant possibles. On peut supposer en fait qu'elle a complètement transformé le problème. Au lieu de compter chaque deux temps «un, deux; un, deux», elle a redéfini la tâche pour faire en sorte de nommer chaque deux battements à l'intérieur de la mesure. Ainsi, «deux» réapparaît de manière régulière à tous les cinq battements. Terry a de cette manière trouvé une réponse à sa problématique. Cependant, cette solution entre en conflit avec les résultats de ses pairs, puisque, en aucun moment, celle-ci ne conduit à une possibilité de faire coïncider les battements, alors que celle des autres enfants le permet.

Une attention particulière et une écoute attentive accordées à cette problématique de l'enfant conduisent à une analyse plus poussée et à une nouvelle interprétation. C'est cette écoute attentive et cette analyse plus poussée qui sont totalement absentes de la plupart des travaux conduits dans une perspective constructiviste. Les questions à se poser à cette étape sont les suivantes: «Y a-t-il un lien entre la solution de Terry et les solutions conçues par le reste de la classe? La conception mise de l'avant apparaît-elle comme une conception isolée ou marginale susceptible d'apporter un certain éclairage à la compréhension du PPCM?» Afin de répondre à cette question, examinons le rôle que joue la mesure dans la notation musicale conventionnelle.

Il semble que Terry ait raison de vouloir ainsi segmenter le comptage de base; celui-ci lui permet en effet d'utiliser une mesure standard, qui sert de point de repère aux participants pour taper des mains à un rythme régulier. Mais si l'on applique cette segmentation au problème posé, cela soulève un dilemme. En effet, s'il s'agissait d'une mesure à deux temps et non d'une mesure à cinq temps, le deux dans chaque mesure (un, deux; un, deux) représenterait effectivement un deux-temps, dans lequel chaque battement serait indiqué, et dans lequel le trois n'existerait pas. De même, si la mesure désignait une mesure à trois temps au lieu d'une mesure à cinq temps, le trois de chaque mesure (un, deux, trois; un, deux, trois) représenterait un trois-temps, et dans cette mesure, les enfants pourraient taper des mains chaque troisième battement. Pourtant le deux aurait ici un tout autre statut, il correspondrait au nom du deuxième battement à l'intérieur de chaque mesure. Il semble donc n'y avoir aucun lien possible entre la méthode de la classe et celle de Terry. Sa méthode, bien qu'elle soit fondée, semble ici associée à une conception isolée et marginale.

Alors posons le problème d'une autre façon. Comment pourrions-nous trouver un moyen pour que l'enfant qui contrôle la mesure puisse aider les deux compteurs, s'ils perdent le rythme, à se réinsérer dans le jeu, tout en retenant les deux significations mises de l'avant pour le deux-temps, présentées précédemment? La méthode de Terry peut être reliée au problème tel qu'il a été formulé initialement par le professeur. Supposons que le compteur utilise comme mesure le plus petit commun multiple des deux rythmes de battements utilisés par les enfants (dans ce cas, six), alors, l'enfant qui tape aux deux temps tapera des mains régulièrement à chaque temps nommé «deux», «quatre» et «six». Et celui qui tape aux trois temps, tapera des mains à chaque battement étiqueté «trois» et «six». Ainsi, tous les six battements, les deux enfants auront la possibilité de se retrouver. On peut voir alors comment la méthode de Terry peut conduire à une mesure qui permet d'établir un pont entre les deux rythmes tapés par les enfants. Le défi posé par le professeur aux enfants n'est plus le même. Il devient celui de trouver la plus petite mesure qui permette à chaque enfant de taper le rythme régulièrement.

Voix et perspective

Comment une interprétation comme celle que nous venons de présenter peut-elle être vue dans les termes d'une théorie constructiviste radicale? De toute évidence, cette analyse dépasse la proposition de Terry. Nous voyons également que la situation diffère de ce qu'avait initialement envisagé le professeur en utilisant le rythme pour enseigner la notion de plus petit commun multiple. Pour mieux décrire ce type d'analyse qui fait partie d'un travail fondamental dans une perspective constructiviste radicale, nous avons recours à deux concepts, celui de voix et celui de perspective.

L'écoute attentive et soutenue nous permet d'élaborer un modèle que nous supposons opérationnel pour l'étudiant. L'articulation de ce modèle correspond à «la voix de l'étudiant». Dans le cas de Terry, l'idée qu'elle a eue de segmenter les battements et de marquer le rythme à partir des temps nous semble une description raisonnable de la voix de l'étudiant. Nous arrivons à mieux saisir cette voix, lorsque nous ajoutons à cette explication initiale l'insatisfaction que Terry a ressentie lorsqu'elle a constaté la non-coïncidence des battements. Ajoutons de plus l'idée que n'importe quelle valeur de temps peut être utilisée comme mesure et le fait que cette mesure, pour elle, peut aider les enfants en facilitant le comptage des battements et la reprise du rythme, et nous arrivons à mieux comprendre le concept de voix.

Parallèlement à cette présentation de la voix de l'étudiant, une prise en compte de la perspective de l'interviewer ou de l'enseignant est nécessaire pour montrer les changements qui surviennent tout au long de ce processus d'interaction avec l'élève et d'interprétation. C'est cette prise en compte de la perspective de l'interviewer ou de l'enseignant, c'est-à-dire des significations que celui-ci accorde sur le plan épistémologique aux mathématiques, et cette prise en compte des transformations qui surviennent au cours du processus d'interaction avec les étudiants et les étudiantes qui manquent dans la majeure partie des écrits se situant dans une position constructiviste non radicale. L'introduction du concept de mesure indique que lorsqu'on cherche le plus petit commun multiple de deux nombres, on cherche à trouver un troisième nombre qui puisse réunir les deux autres. Cette fonction pourra se faire en créant une quantité, pouvant être mesurée intégralement par chacune des deux autres mesures.

Lorsqu'on fait une analyse de la voix de l'étudiant et de la perspective de l'interviewer, il ne faut pas oublier qu'elles interagissent entre elles et que la frontière qui les sépare n'est jamais très bien définie. Cette interaction se produit pendant les échanges qui surviennent, en classe ou dans une entrevue, lorsque la perspective du professeur ou de l'interviewer influe sur le type de voix de l'étudiant qui sera entendu et considéré. Elle survient une seconde fois, au moment de l'interprétation des données ou des réponses des élèves. Une position intéressante consiste à concevoir la voix comme enchâssée dans celle de perspective, en essayant de les dissocier par la suite, puis d'inverser cette relation de façon à mettre en évidence en tant qu'enseignant ou chercheur sa propre perspective en regard de la voix de l'étudiant. À mesure que l'on devient de plus en plus conscient de cette relation entre voix et perspective, on peut mieux voir en quoi ce qui est considéré comme inefficacité ou incompréhension de la part de l'étudiant, n'est souvent que le résultat de notre propre inflexibilité à considérer toute autre perspective.

Un exemple au postsecondaire

Pour mieux montrer l'intérêt que présentent les concepts de voix et de perspective, prenons un deuxième exemple. Nous retenons cet exemple pour montrer la nécessité d'instaurer une perspective constructiviste radicale autant aux ordres secondaire et postsecondaire qu'à celui du primaire. Vouloir transformer l'éducation mathématique uniquement au primaire constitue en effet un danger et perpétue la croyance populaire que l'expertise en mathématiques suffit pour comprendre et circonscrire la voix de l'étudiant aux autres ordres d'enseignement. En analysant le développement du concept de fonction dans nos propres expériences, nous avons montré au contraire que l'éducation mathématique limite plus qu'elle n'incite l'expert à reconnaître la diversité de perspectives.

Nous avons choisi un exemple tiré d'une entrevue menée avec un étudiant de première année universitaire. Celui-ci avait participé à une série de huit séances d'enseignement individuel d'une heure chacune, au sein d'une classe de rattrapage en mathématiques et était insatisfait de ses résultats. Au moment de l'entrevue finale, cet étudiant avait déjà été rencontré à raison de deux entrevues par semaine, pendant cinq semaines. Les entrevues, structurées autour de problèmes contextuels et de multiples représentations (Confrey, 1991), visaient à cerner sa compréhension des fonctions exponentielles. Le travail effectué par l'étudiant en réponse au problème qui suit est représenté par la figure 3 et les références dans la transcription montrent le contenu et l'évolution du travail. Voici le problème.

> Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. Combien de robots y trouve-t-elle? Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?

L'étudiant lit le problème, puis on lui demande de dire ce qu'il en comprend.

> Eh bien, premièrement, on a les robots. Et, chaque heure, un robot produit un deuxième robot, et alors le robot original est enlevé. Mais alors il [l'expert] a augmenté la production en créant un robot qui produit deux robots identiques à lui-même. Et alors ce robot original, je pense que cet original est aussi mis dans une caisse et expédié... Et il part pendant trois heures... Donc, s'il part avec un robot, et qu'il en produit deux avec ce premier robot, que ce premier robot est expédié ensuite, les deux robots qui restent en produisent chacun deux autres durant la deuxième heure. Ces deux robots originaux sont expédiés par la suite. Chaque robot qui reste en produit à son tour deux autres, ça fait huit en trois heures.

L'interviewer attire son attention sur le fait que «le robot produit deux autres robots en cinq minutes», et lui demande de relire l'énoncé. L'étudiant reprend sa première interprétation.

> Il y a douze périodes de cinq minutes dans une heure. Cela fait 12 x 3, ce qui donne 36 cinq minutes, 36 intervalles de cinq minutes. Et, pour chaque intervalle de cinq minutes, je dois trouver... je dois trouver l'intervalle de cinq minutes... d'un robot qui produit deux robots cinq minutes plus tard, et je dois trouver le taux d'accroissement, ... ils doublent. Alors, ensuite, chacun d'eux produit deux robots de plus, ce qui fait un total de... Alors il en produit deux, et ces deux-là en produisent deux autres, ce qui fait un total de quatre, donc, indépendamment du nombre de départ, c'est le nombre au carré, pas vrai? (OK, dit l'interviewer). Non, ce n'est pas au carré. C'est seulement multiplié par deux. Parce qu'après cinq minutes, il y a... Au départ, à l'instant zéro, il y en a un. Après cinq minutes, il y en a deux. Cinq minutes plus tard, il y en a quatre et encore cinq minutes après, il y en a huit. C'est donc multiplié par deux à chaque fois.

Remarquons qu'après avoir révisé sa première interprétation, qui lui permettait d'arriver à la conclusion qu'il y avait 36 intervalles de cinq minutes en trois heures, Dan a pris un certain temps à reprendre le problème initial pour atteindre le résultat préalablement connu, à savoir qu'après trois intervalles, les robots sont au nombre de huit. Toutefois, le changement d'interprétation du problème entraîne une modification de sa problématique. Il introduit ainsi dans sa reformulation un nouveau défi, celui de découvrir le taux d'accroissement, et il répond à cette question en disant que le nombre de robots double. Son utilisation de l'intervalle, qui apparaît ici comme une étiquette, est importante par le rôle qu'il joue dans l'élaboration du concept de domaine. Dans cette utilisation, chaque nombre entré individuellement représente un nombre d'intervalles. Un ensemble de nombres y est aussi considéré comme un intervalle, et non comme le nom attaché à la coordonnée d'un point. Cette conception refera surface ultérieurement, lorsque Dan tentera de résoudre le problème en s'appuyant sur le fait que 6 x 6 = 36. Les choix de doubler ou d'élever au carré pour expliquer le taux d'accroissement des robots ont été momentanément en compétition. Il a rejeté finalement l'idée d'élever le nombre au carré et a revu simultanément sa terminologie pour remplacer le terme «doubler» par «fois deux». L'on verra, un peu plus loin, que le terme «fois deux» permet à Dan d'évoluer plus facilement vers une généralisation qu'il n'aurait pas fait s'il avait gardé le terme «doubler».

Dan continue ainsi la résolution du problème qui lui est présenté:

D - Ça fait qu'après trois heures, ce serait 36 x 2, j'aurais pensé que ça devait être un peu plus, mais 36 x 2 = 72» (il écrit 36 x 2 = 72 et le calcule sur papier) (voir figure 3a).

I - ... À quoi t'attendais-tu?

D - Sans entrer dans les détails, je m'attendais à ce qu'il y en ait quelque chose comme 200, 250, j'sais pas... Je ne suis pas si sûr que cela que ce soit seulement multiplié par deux chaque fois. Je pense que ça devrait être plus que multiplié par deux. (Il esquisse un diagramme en arbre, voir figure 3b). Mais, ce que je veux dire, c'est qu'on va d'ici à ici, à ici, ça fait une fois deux, ça fait deux fois deux, ça fait quatre... Alors ouais, c'est fois deux. Seulement y'a quelque chose qui ne va pas. Je sais que multiplier par deux est correct, mais c'est 36, oh, OK, OK... Cette réponse ici suit juste une de ces lignes (il se réfère au premier niveau de l'arbre). Il y a quelque chose qui ne va pas ici. Parce que... ici, ça fonctionne [...], les nombres fonctionnent. Je ne sais pas. J'imagine que c'est bon. C'est bon.

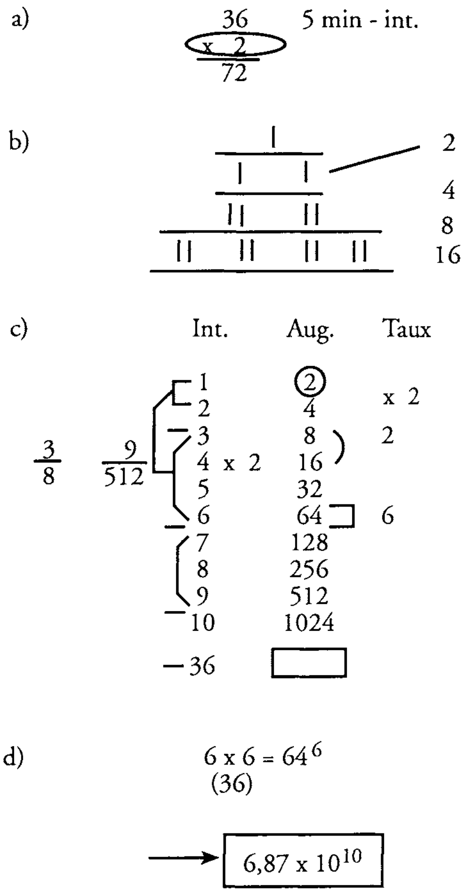

Figure 3 – Le travail de Dan

On note dans ce passage que Dan travaille à partir des deux représentations présentes sur sa feuille, le diagramme en arbre d'une part et ses calculs d'autre part. Son calcul lui dit que 36 fois deux donne 72. Et il reste convaincu qu'il s'agit bien là d'une situation faisant appel à une multiplication par deux, les représentations allant dans le même sens. Par contre, le diagramme en arbre vient semer le doute dans son esprit quant à l'hypothèse des «fois deux», puisque chaque branche est multipliée par deux, de telle sorte que si l'on tient compte de toutes les branches, cela devrait être beaucoup plus grand que «fois deux». Il écrit alors les totaux de chaque rangée, ce qui vient confirmer la logique de la multiplication par deux. Ce malaise fera surface de nouveau plus tard mais, pour le moment, il décide de laisser les choses ainsi.

L'interviewer demande à Dan d'expliquer ce qui arriverait dans l'arbre, aux prochaines étapes, dans le but de l'aider à produire sa propre contradiction face au résultat 72. Ils calculent ensemble le nombre de robots produits jusqu'à ce qu'ils aient atteint 1 024. Dan dit:

> Alors, c'est faux. Ce que je dois trouver c'est le taux d'accroissement [...] et, pour une raison ou une autre, ce n'est pas juste une multiplication. Ça doit être quelque chose à la puissance de [...] quelque chose [...] Hum, 36^2 serait la bonne réponse [...] (long silence) je crois, [...] non, ça non plus ça ne va pas. Le taux d'accroissement à chaque fois est fois deux.

Encore une fois, Dan redéfinit la problématique à la lumière de ses nouvelles tentatives. Il recherche toujours le taux d'accroissement, mais il se rend compte maintenant que la réponse est beaucoup plus élevée que celle initialement prévue de 72. En même temps, il sait que chaque branche de son arbre est obtenue à partir de la branche précédente en multipliant par deux. Il essaie alors d'élever au carré. Toutefois, les calculs qui se trouvent à droite de l'arbre contredisent son hypothèse.

Il esquisse sur le papier un tableau (voir figure 3c) et en identifie les colonnes: «int.» (pour intervalle), «aug.» (pour augmentation) et «taux». Il inscrit les nombres de un à dix dans la colonne «intervalle» et de 2 à 1 024 dans la colonne «augmentation». Quand l'interviewer lui demande ce qu'il cherche à découvrir, Dan répond: «Quel est l'intervalle? Je veux arriver à 36.» Il essaie une stratégie de comparaison en plaçant les nombres d'une colonne en rapport avec ceux de l'autre colonne. Il s'attend à trouver le rapport 1 à 2, ce qui est confirmé pour 2 à 4, mais qui est ensuite contredit pour 3 à 8. Il examine alors la colonne des intervalles et dit: «Si peut-être je multiplie par six, parce que 6 fois 6 donne 36...» (il trace un trait à 6).

En dressant ce tableau, Dan introduit une nouvelle représentation, qui lui permet d'identifier les colonnes et d'étendre le problème à d'autres nombres. Il revient alors sur son objectif et essaie d'expliquer comment on arrive à 36. Cette configuration en colonnes lui permet de découvrir certaines régularités et il essaie d'appliquer un raisonnement en termes de rapport. Tout en mettant en évidence que sa première hypothèse est non fondée, Dan revient sur sa stratégie pour atteindre son but: «Il faut multiplier par 6 parce que 6 fois 6 donne 36.» Le «par 6» signifie qu'il faut progresser par intervalles de 6.

Au cours d'autres entrevues, Dan avait désigné cette stratégie par l'expression «faire des bonds» et il utilisait ces bonds pour savoir comment se déplacer verticalement dans la colonne des abscisses, lorsqu'un déplacement équivalent était effectué dans la colonne des ordonnées.

> D'une certaine façon, hum, très bien, trois? (il trace un trait à trois). Si le taux d'augmentation à trois, à l'intervalle 3 est 8 [...] 3 est à 8 ce que 9 est à 512 (il trace un trait à neuf). Et puisque 3 x 3 = 9 et que huit, 512 divisé par 8 donne (il utilise sa calculatrice) 64 (silence... soupir). Ici, 64 est la valeur pour six, ici (six renvoie ici à un intervalle de six; on a descendu la colonne par intervalle de six) (silence). 3 est à 8 ce que 9 est à 512.

À première vue, cette discussion semble complètement folle. C'est comme si Dan ne se rendait pas compte qu'il y a une différence considérable entre les deux rapports. Mais en continuant d'examiner le rapport entre 8 et 512, son attention se porte sur le chiffre 64, ce qui le conduit à l'observation suivante:

> Lorsqu'on passe de trois à six, on double l'intervalle. Et puis ceci (il pointe huit du doigt) est alors multiplié par lui-même. Il est mis au carré (il montre 64).

Il découvre finalement une hypothèse qui lui permet d'établir une relation entre la variation dans la colonne des intervalles et la variation correspondante dans la colonne des accroissements. C'est un moment significatif de l'entrevue, puisque cette étape marque le début d'une stratégie nouvelle face au problème. Dan délimite aussi trois intervalles égaux, 3, 6 et 9, qu'il met en évidence sur sa feuille. C'est peut-être ceci qui l'incite à considérer sur son papier l'intervalle entre 6 et 9:

D - Donc, trois, OK! Ensuite ici, de six à neuf, on ajoute trois. Donc chaque fois qu'on ajoute, on fait un bond de trois...

I - Chaque fois, on fait un bond de trois...

D - Chaque fois qu'on fait un bond de trois, on élève au carré, 64 au carré donne 512. Non, ça ne va pas... ah.

I - De trois à six, tu ajoutes trois, mais tu avais aussi dit qu'on pourrait l'interpréter comme étant le double de trois.

À cette étape de l'entrevue, Dan a donc deux schémas différents pour expliquer son déplacement dans la colonne des intervalles. Il hésite entre deux explications: voir celui-ci comme l'addition d'une certaine constante (plus trois) ou voir celui-ci comme une multiplication par deux (doubler). Ceci est compréhensible puisque si l'on passe de trois à six, les deux schémas d'interprétation sont possibles, mais lorsqu'on passe de six à neuf, seule la première interprétation fonctionne. L'interviewer lui rappelle ces deux hypothèses.

D - Ouais, fait que ça, c'est fois deux (il inscrit x 2 entre les colonnes) et ça, c'est au carré. Alors, quand je suis passé de trois à six, quand j'ai additionné trois à ma première valeur, j'ai pris le résultat de cette addition, huit, et je l'ai élevé au carré.

I - Quand tu as doublé ta première valeur, tu as pris le résultat et tu l'as élevé au carré.

D - Quand je l'ai doublée, ouais... OK, quand je l'ai doublée... (il efface le x 2). Quand je prends six et que je le multiplie par six, je prends la réponse pour six, et je l'élève au carré. Euh! je mettrais celle-ci à la sixième puissance. Alors, six fois six qui donne 36 (je le multiplie par six) et je prends le résultat de cette opération, qui est 64, et j'élève ce résultat à la sixième puissance. Parce qu'ici, quand je suis passé de trois à six, j'ai additionné, j'ai multiplié par deux et je l'ai élevé au carré.

I - Je ne comprends pas pourquoi tu es en train de tout changer.

D - Je ne change rien. Je passe seulement de six à 36, et c'est six fois six qui est 36, et je prends le résultat que j'ai eu pour six et je l'élève à la puissance six. Ensuite, j'ai 64^6 qui est 6,87 fois dix à la dix (voir figure 3d).

On remarque encore au début de cet échange la présence, chez Dan, de deux hypothèses. Il décide de réunir les deux aspects, ce qui constitue une solution hybride entre ajouter trois et multiplier par deux. L'intervieweuse décide alors de lui représenter son hypothèse précédente. Dan s'engage dans une généralisation, laissant l'intervieweuse loin derrière lui. En s'appuyant sur le fait que $6 \times 6 = 36$ et que 64 correspond à 6, il suppose que 64^6 correspond à 36. Après cet échange, Dan explique plus en profondeur son raisonnement et vérifie son hypothèse en utilisant deux autres exemples. Il explique que 2×2 donne 4 et que $4^2 = 16$ et que $5 \times 2 = 10$ et $32^2 = 1\ 024$. Les deux exemples impliquent une multiplication par deux et une élévation au carré, et ainsi la confirmation de son hypothèse. Dan montre aussi sa capacité de retourner au problème et de l'interpréter à la lumière de ses découvertes, et exprime la confiance qu'il a dans sa réponse.

La voix

L'exemple de retranscription que nous avons donné correspond à la neuvième entrevue avec l'étudiant. Il y avait à cette étape un haut niveau de confiance qu'il est possible de retracer à travers les longs moments de silence et le peu d'attente de l'intervieweuse face à une réponse précise. L'étudiant contrôle le déroulement de la plus grande partie de l'entrevue; on y retrouve de longs passages où celui-ci travaille spontanément sur le problème en pensant à voix haute. L'intervieweuse est intervenue à cinq moments importants: 1) elle a demandé à l'étudiant de lui donner son interprétation du problème; 2) elle lui a demandé de prédire quelles seraient les prochaines valeurs qui seraient obtenues dans l'arbre afin de provoquer une contradiction avec sa prédiction initiale; 3) elle lui a demandé de dire ce qu'il cherchait à faire, quand il semblait perdu, après avoir présenté le tableau; 4) elle a attiré son attention sur les deux hypothèses qu'il utilisait, le recours à l'addition et à la multiplication; et 5) elle lui a demandé de clarifier son hypothèse, ce qui a amené Dan à vérifier son raisonnement. Ces interventions, qui ont une fonction de clarification et de guide, ont eu un effet significatif sur le déroulement de l'entrevue. C'est précisément cet effet qui a amené Steffe à désigner ce type d'entrevue sous le nom d'épisodes d'enseignement, même si cette expression semble négliger l'activité de l'étudiant. Contrairement aux entrevues cliniques qui tendent à se dérouler en une seule séance, ces épisodes d'enseignement s'étalent sur une longue période de temps. Peut-être le terme «entrevues cherchant à cerner le développement de l'étudiant» serait-il plus approprié?

Il y a deux autres moments de l'entrevue avec Dan qui nécessitent des commentaires. Lorsque l'intervieweuse a repris l'énoncé additif que Dan avait émis (faire un «saut de trois») en le reformulant sous une forme multiplicative (doubler trois), elle lui donnait un indice direct, même si l'idée avait effleuré l'esprit de l'étudiant. Plus tard, nous avons vu un autre endroit dans l'entrevue où l'intervieweuse est laissée loin en arrière et s'accroche à ce qui est dit pour essayer de cerner la logique sous-jacente à l'hypothèse finale posée par Dan. Ce genre de situation est regrettable mais difficilement évitable dans une entrevue. Il nous montre l'importance de créer un climat de confiance durant l'entretien de telle sorte que l'étudiant exerce le contrôle de celui-ci. L'interviewer doit seulement, par ses questions/interventions, faire en sorte que l'étudiant clarifie constamment son raisonnement.

La problématique de Dan semble se référer à l'idée de taux d'accroissement. Le premier but qu'il s'est fixé est de trouver ce taux d'accroissement. Il utilise cette idée pour mettre de l'avant 36 x 2 comme réponse. En revanche, lorsqu'il construit son tableau et inscrit les chiffres dans les colonnes, son but est modifié. Il cherche alors à déterminer le taux d'accroissement qui peut être mis en relation avec l'intervalle 36. Finalement, il révise son objectif une autre fois et cherche plutôt à savoir comment il pourrait se servir du fait que 6 x 6 = 36 (pour Dan, cela sous-entend six intervalles de six) pour découvrir ce qui correspond à 36. Le développement de sa problématique évolue donc au cours de l'entrevue, alors que Dan passe par des phases d'action, de coordination des différentes représentations élaborées et de réflexion.

Ainsi pour Dan, la notion de fonction semble être perçue comme mettant en œuvre une covariation des intervalles (auxquels il se réfère en parlant de «sauts») et des augmentations. L'importance qu'il attache à cette idée était déjà manifeste dans les entrevues précédentes. Dans cette dernière entrevue, Dan doit arriver à développer davantage cette idée et à faire la distinction entre la structure opératoire dont il a besoin pour construire un «saut de 36» et la structure opérationnelle correspondante renvoyant à la colonne des augmentations, qui repose sur l'élévation d'un nombre à une puissance quelconque. Il n'a jamais perçu les nombres dans la colonne «augmentation» comme étant des puissances successives de deux. Il remarque plutôt que la multiplication par deux, dans la colonne «intervalle», et l'élévation au carré, dans la colonne «augmentation», se produisent en même temps. Il en tire la conclusion que «faire fois six» et élever le nombre «à la puissance six» doivent correspondre.

Tout au long de l'entrevue, nous avons vu une alternance dans l'utilisation des termes «doubler» et «fois deux», tant au niveau du taux d'accroissement que dans la comparaison d'intervalles. Quand Dan décide de conserver l'idée de multiplication par deux pour décrire le taux d'accroissement, il se trouve devant un autre dilemme. Il ne sait pas s'il doit décrire les intervalles en termes d'addition ou de multiplication. Chaque formulation présente des avantages. Doubler ayant été clairement différencié d'additionner, la formulation «fois deux» est retenue, car elle permet plus facilement de généraliser à «fois six». Nous l'avons finalement vu se décider à décrire les intervalles en termes de multiplication et à décrire l'accroissement en termes de puissance. Il n'a jamais pu résoudre le problème du passage de 6 à 9 (intervalles de cinq minutes). Il opte plutôt pour la correspondance entre (6 fois 6) et 64^6.

Il y a eu un moment crucial dans l'entrevue lorsqu'il a essayé de justifier son hypothèse en s'appuyant sur un raisonnement proportionnel. Il échoue alors dans l'établissement d'une proportion directe, mais cette proposition lui permet de considérer une autre hypothèse et d'envisager une nouvelle approche. Rappelons qu'il avait écrit: 3/8 et 9/512, et qu'il divisa ensuite 512 par 8 pour obtenir 64. Puisqu'il avait déjà ramené son problème à celui de l'utilisation de 6 fois 6 pour arriver à 36, il avait alors regardé d'un peu plus près les intervalles de 3, 6 et 9. Le nombre 64 avait attiré son attention parce qu'il correspondait (dans la colonne augmentation) à 6 et il avait remarqué tout de suite que lorsque 3 était doublé (pour obtenir 6 dans la colonne intervalle), 8 (dans la colonne augmentation) était élevé au carré. L'observation des opérations utilisées dans chaque colonne et la coordination de celles-ci (d'une colonne à l'autre) lui ont permis d'élaborer son hypothèse finale.

Sa réflexion dans ce passage est intéressante: il note certaines incohérences, reformule ses objectifs, considérant sa réponse numérique comme «relativement bonne»; il crée un langage, celui d'intervalles, de sauts, d'accroissement et de taux d'accroissement. Ce langage l'aide à préciser sa solution et après que la réponse ait été obtenue, Dan vérifie celle-ci avec sa calculatrice et prend d'autres exemples pour s'assurer de la validité de son hypothèse.

L'approche de la notion de fonction que Dan a employée a été élaborée par plusieurs autres étudiants dans nos investigations; nous l'avons appelée approche de «covariation» des fonctions pour l'opposer à l'approche actuelle des fonctions, qui met l'accent sur une règle de correspondance. Dans une approche des fonctions articulée sur l'idée de covariation, les étudiants voient les fonctions en tant que coordination de deux variations (présentes dans les deux colonnes de données). Dans le cas des fonctions exponentielles, cette façon de procéder permet de considérer la fonction exponentielle sous le jour de la mise en relation d'une structure additive au niveau du domaine et d'une structure multiplicative au niveau de l'image (Smith et Confrey, sous presse).

La perspective

L'analyse précédente du raisonnement de Dan a mis l'accent sur le développement de la voix de l'étudiant. Celle-ci peut être analysée en termes d'une approche des fonctions qui s'articule sur l'idée de covariation. Elle implique le recours à différentes représentations et une coordination de celles-ci, et utilise les concepts d'intervalle, de taux de variation et d'accroissement. Toutefois, la question de la perspective est tout aussi intéressante à considérer, si l'on veut savoir comment Dan utilise les proportions, un concept central dans l'élaboration des structures multiplicatives (Vergnaud, 1983).

À première vue, la proportion 3/8 9/512 semble mal construite. Mais lorsqu'on l'examine attentivement, on se demande s'il n'est pas possible de trouver une façon de faire où elle pourrait être utile. Ce nouvel examen, à la lumière des inventions de l'étudiant, constitue une composante critique du travail du constructiviste. Dans ce cas, il implique un réexamen de notre propre compréhension de la notion de proportion. Si l'on réécrit la proportion ainsi:

$$\frac{3}{2 \times 2 \times 2} \qquad \frac{9}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

On peut lire ce qui précède de la façon suivante:

$$\frac{3\text{ (uns)}}{3\text{ (deux)}} \quad \frac{9\text{ (uns)}}{9\text{ (deux)}} \quad \text{OU} \quad \frac{3\text{ (uns)}}{3\text{ (deux)}} \quad \frac{3\text{ groupes de (3 uns)}}{3\text{ groupes de (3 deux)}}$$

où l'opération au numérateur renvoie à une addition et celle au dénominateur à une multiplication. D'une certaine façon, si on se réfère à une signification logarithmique, les proportions sont égales. La notation utilisée par Dan permet de transformer une idée vague utilisée au départ en une hypothèse de travail.

Avec cette interprétation, Dan aurait pu découvrir le rapport correspondant en multipliant trois par trois pour obtenir neuf intervalles et en élevant l'accroissement de 8 (correspondant à 3) au cube pour obtenir 512. Cette perspective, que nous avons nous-même élaborée et justifiée, montre que le raisonnement proportionnel peut être étendu pour passer des structures additives aux structures multiplicatives, pour en arriver à établir une proportion logarithmique. L'étude de l'histoire du développement des logarithmes nous montre d'ailleurs qu'un tel modèle avait été utilisé par Bradwadine au début du XIV^{e} siècle (Smith et Confrey, sous presse).

Nous ne voulons pas par là suggérer que Dan avait l'idée de cette proportion logarithmique en tête. Toutefois, cette possibilité lui a peut-être effleuré l'esprit quand il a pensé que le raisonnement proportionnel pourrait lui être utile dans la solution du problème. Mais comme il n'a jamais utilisé dans sa notation l'idée d'une multiplication répétée par deux, cette extrapolation en est peut-être plus une de «perspective» que de «voix». Ainsi, si nous voulons changer radicalement l'enseignement mathématique, nous devons être prêts à revoir notre propre compréhension de notions fondamentales et à expliciter à cet effet les postulats et présupposés implicites sur lesquels celles-ci reposent. C'est cette investigation épistémologique qui est à la base du travail du constructivisme radical.

Conclusion

Nous avons montré que les interprétations constructivistes radicales diffèrent des autres interprétations en ce que le constructivisme radical est une théorie épistémologique qui repose sur le concept de viabilité. Les implications de l'un des concepts clés d'une telle option débouchent sur la prise en compte de différentes perspectives dans la classe, qu'on s'efforcera d'encourager et de favoriser. De plus, l'option constructiviste radicale nous renvoie à une réinterprétation de la signification mathématique des concepts, à la lumière des innovations des étudiants et des étudiantes. Pour ce faire, l'enseignant/l'interviewer doit se familiariser avec les techniques de l'écoute attentive et soutenue, en s'intéressant à l'articulation de la «voix» de l'étudiant et à l'examen des transformations que cela entraîne dans sa propre «perspective». C'est cet enchevêtrement «voix et perspective» qui permet au constructivisme radical d'envisager une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques.

Abstract – Radical constructivism is argued to differ from many other interpretations of constructivism in North America due to its emphasis on the epistemological impact of student inventions. It recognizes that students' views are not simply inadequate or incomplete adult views, and it allows for the reconceptualization of the mathematical content of the expert in light of student invention. Two examples of student work are examined for their epistemological content. One example is drawn from a fourth grade class learning about least common denominators. The other is from a teaching experiment with a college freshman about exponential functions. A distinction between "voice" and "perspective" is introduced to differentiate between the epistemological content attributed to the student (voice) and its impact on the knowledge of the expert (perspective).

Resumen – El constructivismo radical difiere de varias interpretaciones constructivistas norte-americanas por el hecho que se interesa a los efectos epistemológicos de las innovaciones de los y las estudiantes. El reconocer que el punto de vista de éstos no es un simple punto de vista de adulto equivocado o incompleto, permite así reconceptualizar el contenido matemático del experto (maestro o investigador) enfocándolo a la luz de invenciones de los y de las estudiantes. En este artículo, se examinarán dos casos. El primero surge de una experiencia de aprendizaje del más pequño múltiple común en una clase de cuarto año. El segundo relata una experiencia de enseñanza de las funciones exponenciales ante un estudiante de primer año universitario. Para distinguir el contenido epistemológico del saber del estudiante y sus «efectos» en el saber del experto, designaremos el primero por el vocablo «voz» y el segundo por el de «perspectiva».

Zusammenfassung – Der radikale Konstruktivismus unterscheidet sich von mehreren nordamerikanischen Abarten dadurch, dass er sich für die epistemologischen Auswirkungen der Neuerungen der Studenten interessiert. Indem er zugibt, dass deren Standpunkt nicht einfach ein falscher oder unvollständiger Erwachsenenstandpunkt ist, kann man den mathematischen Inhalt des Fachmanns (ob Lehrer oder Forscher) neu formulieren, indem man ihn aus der Sicht der Neuerungen der Studenten betrachtet. So werden in diesem Artikel zwei

Fälle untersucht: der erste stammt aus einem Lernexperiment des kleinsten gemeinsamem Vielfachen in vierten Jahrgang. Der zweite berichtet über einen Unterrichtsversuch über die Exponentialfunktionen mit einem Studenten im ersten Universitätsjahr. Um den epistemologisschen Inhalt des Wissens des Studenten und dessen «Wirkung» auf das Wissen des Fachmanns zu unterscheiden, bezeichnen wir den ersteren mit dem Wort «Stimme» und den zweiten mit «Perspektive».

RÉFÉRENCES

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. *In* E. Von Glasersfeld (dir.), *Radical constructivism in mathematics education* (p. 89-110). Dortrecht: Kluwer.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. *In* D. A. Grouws and T. J. Cooney (dir.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (p. 26-46). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and the National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P. and Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal of Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Cobb, P., Wood, T. and Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. *In* E. von Glasersfeld (éd.), *Radical constructivism in mathematics education* (p. 157-176). Dortrecht: Kluwer.

Confrey, J. (1980). *Conceptual change, number concepts and the introduction to calculus.* Thèse de doctorat non publiée, Cornell University, Ithaca, NY.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. *In* L. Steffe (dir.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (p. 124-159). New York, NY: Springer-Verlag.

Confrey, J. (1993). Learning to see children's mathematics crucial challenges in constructivist reform. *In* K. Tobin (dir.), *Constructivist perspectives in science and mathematics* (p. 299-321). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Glasersfeld, E. von (1982). An interpretation of Piaget's constructivism. *Revue internationale de philosophie, 36*(4), 612-635.

Smith, E. and Confrey, J. (sous presse). Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function. *In* G. Harel and J. Confrey (dir.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. *In* R. Lesh and M. Landau (dir.). *Acquisition of mathematical concepts and processes* (p. 127-173). New York, NY: Academic Press.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en didactique des mathématiques, 6*(1), 69-118.